Soluciones a los ejercicios propuestos del Tema 1

1.1.(a) Teniendo en cuenta los números que están en la misma fila, columna o grupo de 9 casillas para cada una de las letras, resulta que la letra A sólo puede tomar 5 valores $(2, 4, 7, 8, 9)$, la letra B 4 valores $(1, 4, 6, 8)$ y la letra C 5 valores $(1, 2, 4, 7, 9)$. Entonces, la probabilidad de acertar los valores de las tres letras es $1/(5 \times 4 \times 5) = 1/100 = 0.01$
1.1.(b) La probabilidad de no acertar ninguno de los tres valores es

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = 0.48\,,$$

y la de acertar al menos uno de ellos es $1 - 0.48 = 0.52$.
1.1.(c) La probabilidad de acertar al menos dos letras es

$$1-\big(\text{Prob. de no acertar ninguna} + \text{Prob. de acertar exactamente una letra}\big)\,,$$

con Prob. de no acertar ninguna$= 0.48$, como hemos visto en el apartado anterior. Falta calcular la Prob. de acertar exactamente una letra. Denotamos por A, B y C los sucesos "acertar el valor de la letra" correspondiente, y por A^c, B^c y C^c los sucesos "no acertar el valor de la letra" correspondiente. Entonces, la Prob. de acertar exactamente una letra es

$$P(A \cap B^c \cap C^c) + P(A^c \cap B \cap C^c) + P(A^c \cap B^c \cap C) =$$
$$\big(\frac{1}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}\big) + \big(\frac{4}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{4}{5}\big) + \big(\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{5}\big) = \frac{10}{25} = 0.4$$

Entonces, la probabilidad de acertar al menos dos de las letras es $1 - (0.48 + 0.4) = 1 - 0.88 = 0.12$. Y la probabilidad de acertar exactamente dos es la de acertar al menos dos menos la de acertar tres, $0.12 - 0.01 = 0.11$.

1.2.(a) Si $P(H) = 0.7$, $P(C) = 0.5$ y $P(H \cap C) = 0.4$, denotando por H el suceso "hay hierro" y por C el suceso "hay cuarzo", la probabilidad de que haya alguno de los minerales es

$$P(H \cup C) = P(H) + P(C) - P(H \cap C) = 0.7 + 0.5 - 0.4 = 0.8$$

1.2.(b) Usamos que $(H \cup C)^c = H^c \cap C^c$. Entonces, la probabilidad de que no hay ninguno de los minerales es

$$P(H^c \cap C^c) = P((H \cup C)^c) = 1 - P(H \cup C) = 1 - 0.8 = 0.2$$

1.2.(c) La probabilidad de que haya uno y sólo uno de los minerales es

$$P((H \cap C^c) \cup (H^c \cap C)),$$

y por ser una unión disjunta, la probabilidad de la unión es suma de probabilidades,

$$\begin{aligned} P(H \cap C^c) + P(H^c \cap C) &= \big(P(H) - P(H \cap C)\big) + \big(P(C) - P(C \cap H)\big) \\ &= (0.7 - 0.4) + (0.5 - 0.4) = 0.3 + 0.1 = 0.4 \end{aligned}$$

1.3. En serie: $0.9^3 = 0.729$ (es la probabilidad de la intersección de los tres sucesos correspondientes a que funcionen correctamente las tres componentes, ya que si se disponen en serie, el circuito funciona si funcionan las tres componentes).
En paralelo: 0.999 (si se disponen en paralelo, el circuito funciona si funciona alguna de las tres componentes, que es lo contrario de que no funcione ninguna; entonces, la probabilidad de que funcione el circuito es 1 menos la probabilidad de que no funcione ninguna de las tres, que es $(1 - 0.9)^3 = 0.1^3 = 0.001$, luego da $1 - 0.001 = 0.999$).
1.4. La probabilidad de obtener dos reyes es $P(\text{dos reyes}) = \binom{4}{2} / \binom{48}{2} = \frac{4\times 3}{48\times 47} \cong 0.005319$ pues los "casos posibles" son las maneras de coger 2 cartas de entre las 48 que hay en total, y los "casos favorables" son la maneras de coger 2 cartas de entre los 4 reyes. También se puede hacer condicionando:

$$P(\text{rey la segunda/rey la primera})\, P(\text{rey la primera}) = \frac{3}{47} \times \frac{4}{48}\,.$$

La probabilidad de sacar primero un rey y luego un as es, condicionando,

$$P(\text{as la segunda/rey la primera})\, P(\text{rey la primera}) = \frac{4}{47} \times \frac{4}{48} \cong 0.007092$$

(lo hacemos condicionando porque, a diferencia del caso de los dos reyes, el orden ahora sí que importa).
1.5. Las posibilidades para el ácido glutámico (G) y la alanina (A) en este orden son: que ocupen las posiciones 1 y 2, las posiciones 2 y 3, o las posiciones 3 y 4 (y en cada caso, para las otras dos posiciones hay 2! posibilidades), así que "casos favorables" hay $3 \times 2!$, y "casos posibles" hay 4!, que son las maneras de ordenar los 4 aminoácidos. Por tanto la probabilidad es

$$\frac{3 \times 2!}{4!} = \frac{3}{4 \times 3} = \frac{1}{4} = 0.25$$

1.6.(a) La probabilidad que tiene cada uno de los 8 dígitos de ser un 0 es $1/10 = 0.1$, y de no serlo, $1 - 0.1 = 0.9$. Por tanto, la probabilidad de que no lo sea ninguno de los 8 es $0.9^8 = 0.43046721$
1.6.(b) La probabilidad que tiene cada uno de los 8 dígitos de ser un 0 o un 1 es $2/10 = 0.2$, y de no ser ni un 0 ni un 1, $1 - 0.2 = 0.8$. Por tanto, la probabilidad de que ninguno de los 8 sea ni un 0 ni un 1 es $0.8^8 = 0.16777216$
1.6.(c) La probabilidad de que no aparezcan a la vez el 0 y el 1 es $P(A \cup B)$, donde A="no aparece ningún 0" y B="no aparece ningún 1. Entonces, por los apartados anteriores,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.9^8 + 0.9^8 - 0.8^8 = 0.69316226$$

1.7. La probabilidad condicionada del suceso que uno (y sólo uno) de los dados muestre un 6, al hecho de que los 3 han sacado caras diferentes, es la probabilidad de la intersección partido por la del que condiciona. La probabilidad del numerador, la de la intersección, es la de que uno de los dados sea un 6 y los otros dos sean diferentes entre sí y diferentes de 6; esta probabilidad es

$$\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{6}$$

(para uno de los dados sólo hay una posibilidad, el 6, para otro hay 5 posibles caras, y para el tercero sólo quedan 4). La probabilidad del denominador es la de que los 3 dados saquen caras diferentes, y es

$$\frac{6}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{6}$$

(6 posibilidades para uno, 5 para el siguiente y 4 para el último). Por tanto, la probabilidad que nos piden es el cociente

$$\frac{\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{6}}{\frac{6}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{6}} = \frac{1}{6}$$

1.8.(a) Sí, ya que $1 + 2 + \cdots + 6 = 21$.
1.8.(b) No son independientes, pues

$$P(A) = \frac{2+4+6}{21} = \frac{12}{21}, \quad P(B) = \frac{1+2+3+4}{21} = \frac{10}{21}, \quad \text{y}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2+4}{21} = \frac{6}{21} \neq \frac{12}{21} \times \frac{10}{21}$$

1.8.(c) Con un dado perfecto sí serían independientes, ya que en ese caso

$$P(A) = 1/2, \quad P(B) = 2/3 \quad \text{y} \quad P(A \cap B) = 1/3$$

1.9. Si denotamos por N el suceo "el artículo es no conforme", los datos del problema son:

$$P(A) = 0.25, \; P(B) = 0.35, \; P(C) = 0.40,$$

$$P(N/A) = 0.05, \; P(N/B) = 0.03, \; P(N/C) = 0.02$$

Aplicamos Bayes para calcular

$$P(A/N) = \frac{P(N/A)\,P(A)}{P(N)} = \frac{P(N/A)\,P(A)}{P(N/A)\,P(A) + P(N/B)\,P(B) + P(N/C)\,P(C)}$$

y queda:

$$P(A/N) = \frac{0.05 \times 0.25}{0.05 \times 0.25 + 0.03 \times 0.35 + 0.02 \times 0.40} = \frac{0.0125}{0.031} = 0.4032258065$$

Análogamente,

$$P(B/N) = \frac{0.03 \times 0.35}{0.05 \times 0.25 + 0.03 \times 0.35 + 0.02 \times 0.40} = \frac{0.0105}{0.031} = 0.3387096774 \text{ y}$$

$$P(C/N) = \frac{0.02 \times 0.40}{0.05 \times 0.25 + 0.03 \times 0.35 + 0.02 \times 0.40} = \frac{0.008}{0.031} = 0.2580645161$$

(las tres probabilidades suman 1). Es más probable que la haya fabricado la máquina A.

1.10. Si denotamos por CA el suceso "el individuo se clasifica como del grupo A", los datos del problema son:

$$P(A) = 0.41\,,\ P(B) = 0.09\,,\ P(AB) = 0.04\,,\ P(O) = 0.46$$

$$P(CA/O) = 0.04\,,\ P(CA^c/A) = 0.12\,,\ P(CA/B) = 0.04\,,\ P(CA/AB) = 0.10$$

Aplicamos Bayes para calcular

$$P(A/CA) = \frac{P(CA/A)\,P(A)}{P(CA)} =$$

$$\frac{P(CA/A)\,P(A)}{P(CA/A)\,P(A) + P(CA/B)\,P(B) + P(CA/AB)\,P(AB) + P(CA/O)\,P(O)}$$

y queda:

$$\begin{aligned} P(A/CA) &= \frac{(1-0.12)\times 0.41}{(1-0.12)\times 0.41 + 0.04\times 0.09 + 0.10\times 0.04 + 0.04\times 0.46} \\ &= \frac{0.3608}{0.3868} = 0.9327817994 \end{aligned}$$

1.11. Tenemos que

$$P(A) = 0.10\,,\quad P(+/A) = 0.85 \quad \text{y} \quad P(+/S) = 0.04$$

(A indica tener artritis y S indica estar sano; + indica que el procedimiento de detección da positivo). Por Bayes podemos calcular

$$\begin{aligned} P(A/+) &= \frac{P(+/A)\,P(A)}{P(+)} = \frac{P(+/A)\,P(A)}{P(+/A)\,P(A) + P(+/S)\,P(S)} \\ &= \frac{0.85\times 0.10}{0.85\times 0.10 + 0.04\times(1-0.10)} = \frac{0.085}{0.121} = 0.7024793388 \end{aligned}$$

1.12.(**a**) Los datos del problema son:

$$P(D) = 0.02 \quad \text{y} \quad P(+/D) = 0.5$$

siendo D el suceso "individuo diabético", + el suceso "el individuo afirma ser diabético" y - el suceso contrario. Además, si denotamos por S el suceso "individuo sano (no diabético)", implícitamente el enunciado nos dice que $P(-/S) = 1$, es decir, que si un individuo no es diabético, lo sabe (son los diabéticos los que pueden saberlo o no). Entonces, por Bayes,

$$
\begin{aligned}
P(D/-) &= \frac{P(-/D)\,P(D)}{P(-)} = \frac{P(-/D)\,P(D)}{P(-/D)\,P(D) + P(-/S)\,P(S)} \\
&= \frac{0.5 \times 0.02}{0.5 \times 0.02 + 1 \times (1 - 0.02)} = \frac{0.01}{0.99} = 0.\widehat{01}
\end{aligned}
$$

1.12.(b) Para cada uno de los 10 individuos, la probabilidad de no ser diabético si afirma no serlo es $p = P(S/-) = 1 - P(D/-) = 1 - 0.\widehat{01}$. Si todos afirman que no lo son, la probabilidad de que al menos uno de ellos lo sea, es 1 menos la probabilidad de que no lo sea ninguno, es decir, es

$$1 - p^{10} = 1 - (1 - 0.\widehat{01})^{10} = 0.0965402461$$

1.13.(a) Si D denota "es descubierto", y L "dispone de localizador", los datos del problema son

$$P(D) = 0.60\,, \;\; P(L/D) = 0.60\,, \;\; P(L^c/D^c) = 0.90$$

aplicando Bayes, tenemos que

$$
\begin{aligned}
P(D^c/L) &= \frac{P(L/D^c)\,P(D^c)}{P(L)} = \frac{P(L/D^c)\,P(D^c)}{P(L/D^c)\,P(D^c) + P(L/D)\,P(D)} \\
&= \frac{(1 - 0.90) \times (1 - 0.60)}{(1 - 0.90) \times (1 - 0.60) + 0.60 \times 0.60} = \frac{0.04}{0.40} = 0.1
\end{aligned}
$$

1.13.(b) Análogamente, por Bayes, usando que en el apartado anterior hemos calculado $P(L) = 0.40$ (en el denominador), tenemos que

$$
\begin{aligned}
P(D/L^c) &= \frac{P(L^c/D)\,P(D)}{P(L^c)} = \frac{P(L^c/D)\,P(D)}{1 - P(L)} \\
&= \frac{(1 - 0.60) \times 0.60}{1 - 0.40} = \frac{0.24}{0.60} = 0.4
\end{aligned}
$$

1.14.(a) La probabilidad que se ha de calcular, p, se obtiene imponiendo que la probabilidad de que haya que reparar una junta (que es 0.14) sea la probabilidad de que falle algún remache, que es 1 menos la probabilidad de que

no falle ninguno (y esta probabilidad es $(1-p)^{25}$). Por tanto, despejando de $0.14 = 1-(1-p)^{25}$ obtenemos que $p = 0.006014754$.
1.14.(b) Ídem con $0.10 = 1-(1-p)^{25}$, y se obtiene $p = 0.0042055524$.
1.15. Sumando las probabilidades de que las muestras con reactivo sean 4, y sean 5, y calculando estas probabilidades por "casos favorables/casos posibles", tenemos

$$\frac{\binom{6}{4}\binom{4}{1}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{6}{5}\binom{4}{0}}{\binom{10}{5}} = \frac{11}{42} = 0.2619047619$$

1.16.(a) $3 \times 4 \times 5 = 60$.
1.16.(b) $2 \times 5 = 10$.
1.16.(c) Usando "casos favorables/casos posibles", la probabilidad que se pide es:

$$\frac{(3\times 4\times 5)\times(3\times 4\times 4)\times(3\times 4\times 3)\times(3\times 4\times 2)\times(3\times 4\times 1)}{(3\times 4\times 5)^5}$$
$$= \frac{5!}{5^5} = \frac{24}{625} = 0.0384$$

1.17. Si F denota "el terreno tiene fallas", + denota "el procedimiento de detección de fallas da positivo (esto es, dice que el terreno las tiene)", y $-$ el suceso contrario, los datos del problema son

$$P(F) = 0.15\,,\ P(+/F) = 0.90\,,\ P(-/F^c) = 0.95$$

Y aplicando Bayes podemos calcular

$$\begin{aligned} P(F/+) &= \frac{P(+/F)\,P(F)}{P(+)} = \frac{P(+/F)\,P(F)}{P(+/F)\,P(F) + P(+/F^c)\,P(F^c)} \\ &= \frac{0.90\times 0.15}{0.90\times 0.15 + (1-0.95)\times(1-0.15)} = \frac{0.135}{0.1775} = 0.7605633803 \end{aligned}$$

1.18. La probabilidad de que el perro quede inmunizado la primera vez es 0.8, la de que quede inmunizado la segunda es $(1-0.8)\times 0.8$ (ya que para que se vacune la segunda vez, la primera tiene que haber fallado), la de que quede inmunizado la tercera vez es $(1-0.8)^2 \times 0.8$ (las dos primeras han de haber fallado) y, en general, la de que quede inmunizado la vez n, es $(1-0.8)^{n-1}\times 0.8$. Buscamos el primer n para el que la suma de estas probabilidades es mayor o igual que 0.99. Con $n = 1$ no es suficiente pues $0.8 < 0.99$. Con $n = 2$

tampoco pues $0.8 + (1 - 0.8) \times 0.8 = 0.96 < 0.99$. Pero con $n = 3$ ya sí que es suficiente, porque $0.8 + (1 - 0.8) \times 0.8 + (1 - 0.8)^2 \times 0.8 = 0.992 \geq 0.99$. Por tanto, hay que vacunar 3 veces al perro.

1.19. Como la probabilidad de que una pieza sea de la zona A es $P(A) = 0.15$, y de que sea de la zona B es $P(B) = 1 - 0.15 = 0.85$, suponiendo que en el emplazamiento hay un gran número de piezas (lo que hace que al ir extrayendo algunas de ellas, estas probabilidades siguen siendo las mismas para el resto), la probabilidad de tener que esperar hasta la séptima para obtener la primera de A es

$$P(B)^6\, P(A) = 0.85^6 \times 0.15 = 0.05657242734\,,$$

puesto que las 6 primeras han de ser de B y la última de A. La probabilidad de tener que esperar hasta la duodécima para obtener 3 de la zona A es:

$$P(B)^9\, P(A)^3 \binom{11}{2} = 55 \times 0.85^9 \times 0.15^3 = 0.04299389565\,,$$

ya que en total ha de haber 9 de la zona B y 3 de la zona A, pero además, salvo la última, que ha de ser de A a la fuerza, entre las 11 restantes las 2 de A que no son la última pueden estar en cualquier posición; por eso se ha de multiplicar por el número de maneras de escoger las posiciones para las 2 piezas de la zona A de entre las 11 posiciones, que es $\binom{11}{2}$.

1.20.(a) Si N indica “la prueba no es concluyente” y S el suceso contrario, tenemos que $P(N) = 0.7$ y $P(S) = 1 - 0.7 = 0.3$. La probabilidad que nos piden es

$$P(N)^8\, P(S) = 0.7^8 \times 0.3 = 0.017294403$$

1.20.(b) En este caso, con un razonamiento análogo al del problema anterior, la probabilidad es

$$P(N)^5\, P(S)^5 \binom{9}{4} = 0.7^5 \times 0.3^5 \times 126 = 0.0514596726$$

1.21.(a) Si denotamos por $-$ el suceso “estar en contra de la construcción del centro comercial”, por la Fórmula de las Probabilidades Totales tenemos que

$$\begin{aligned} P(-) &= P(-/A)\, P(A) + P(-/B)\, P(B) + P(-/C)\, P(C) \\ &= 0.10 \times 0.20 + 0.80 \times 0.50 + 0.60 \times 0.30 = 0.60 \end{aligned}$$

es decir, un 60 % de los electores están en contra.

1.21.(b) Aplicaremos la Fórmula de Bayes:

$$P(A/-) = \frac{P(-/A)\,P(A)}{P(-)} = \frac{0.10 \times 0.20}{0.60} = \frac{0.02}{0.60} = 0.0\overset{\frown}{3}$$
$$P(B/-) = \frac{P(-/B)\,P(B)}{P(-)} = \frac{0.80 \times 0.50}{0.60} = \frac{0.40}{0.60} = 0.\overset{\frown}{6}$$
$$P(C/-) = \frac{P(-/C)\,P(C)}{P(-)} = \frac{0.60 \times 0.30}{0.60} = \frac{0.18}{0.60} = 0.3$$

Es más probable que sea del partido B.
1.22.(a) Denotamos por Q el suceso "hay contaminación química", y por T el suceso, "hay contaminación térmica". Entonces, tenemos que los datos del problema son:

$$P(Q \cap T) = 0.05\,,\ P(Q) = 0.40\,,\ P(T) = 0.35$$

A partir de esto hemos de calcular

$$\begin{aligned} P(T^c/Q) &= \frac{P(T^c \cap Q)}{P(Q)} = \frac{P(Q) - P(Q \cap T)}{P(Q)} \\ &= \frac{0.40 - 0.05}{0.40} = \frac{0.35}{0.40} = 0.875 \end{aligned}$$

1.22.(b) Ahora hemos de calcular

$$\begin{aligned} P(T^c/Q^c) &= \frac{P(T^c \cap Q^c)}{P(Q)} = \frac{P(T^c) - P(T^c \cap Q)}{P(Q)} \\ &= \frac{(1 - 0.35) - 0.35}{1 - 0.40} = \frac{0.30}{0.60} = 0.5\,, \end{aligned}$$

donde $P(T^c \cap Q)$ se ha calculado en el numerador del apartado anterior.
1.23. Llamamos A al suceso "haber contestado a la pregunta A" y B al suceso "haber contestado a la pregunta B". Denotamos por $+$ dar una respuesta positiva. Entonces, como dato del problema nos dicen que $P(+) = 0.7$. Utilizando la Fórmula de las Probabilidades Totales tenemos que

$$P(+) = P(+/A)\,P(A) + P(+/B)\,P(B) = 0.5 \times 0.5 + P(+/B) \times 0.5$$

puesto que las probabilidades de cara y de cruz en la moneda son de 0.5, y también la de que en el dado salga par. A partir de aquí despejamos

$$P(+/B) = \frac{0.7 - 0.5 \times 0.5}{0.5} = \frac{0.45}{0.5} = 0.9\,,$$

que es la probabilidad de haber probado la marihuana alguna vez. Luego la estimación es del 90 %.

1.24. Si E es el suceso "el terreno puede ser explotado", nos piden calcular en primer lugar su probabilidad, cosa que haremos mediante la Fórmula de las Probabilidades Totales:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E/A)\,P(A) + P(E/B)\,P(B) + P(E/C)\,P(C) \\ &= 0.4 \times 0.2 + 0.3 \times 0.1 + 0.05 \times 0.7 = 0.145 \end{aligned}$$

y resulta ser un 14.5 % de la superficie. Para contestar a la segunda pregunta hemos de calcular, mediante la Fórmula de Bayes, las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned} P(A/E) &= \frac{P(E/A)\,P(A)}{P(E)} = \frac{0.4 \times 0.2}{0.145} = \frac{0.08}{0.145} = 0.5517241379 \\ P(B/E) &= \frac{P(E/B)\,P(B)}{P(E)} = \frac{0.3 \times 0.1}{0.145} = \frac{0.03}{0.145} = 0.2068965517 \\ P(C/E) &= \frac{P(E/C)\,P(C)}{P(E)} = \frac{0.05 \times 0.7}{0.145} = \frac{0.035}{0.145} = 0.2413793103 \end{aligned}$$

y podemos ver que es más probable que provenga de la zona A.

1.25. Denotando por + el suceso "presenta la característica morfológica", tenemos que

$$\begin{aligned} P(E_1) = 0.1\,, \quad P(E_2) = 0.4\,, \quad P(E_3) = 0.5 \\ P(+/E_1) = 0.8\,, \quad P(+/E_2) = 0.6\,, \quad P(+/E_3) = 0.3 \end{aligned}$$

son las probabilidades que nos da el enunciado del problema. Por Bayes calculamos:

$$\begin{aligned}
P(E_1/+) &= \frac{P(+/E_1)\,P(E_1)}{P(+)} \\
&= \frac{P(+/E_1)\,P(E_1)}{P(+/E_1)\,P(E_1) + P(+/E_2)\,P(E_2) + P(+/E_3)\,P(E_3)} \\
&= \frac{0.8 \times 0.1}{0.8 \times 0.1 + 0.6 \times 0.4 + 0.3 \times 0.5} = \frac{0.08}{0.47} = 0.170212766 \\
P(E_2/+) &= \frac{P(+/E_2)\,P(E_2)}{P(+)} = \frac{0.6 \times 0.4}{0.47} = \frac{0.24}{0.47} = 0.5106382979 \\
P(E_3/+) &= \frac{P(+/E_3)\,P(E_3)}{P(+)} = \frac{0.3 \times 0.5}{0.47} = \frac{0.15}{0.47} = 0.3191489632
\end{aligned}$$

(que suman 1, claro). Vemos que la mayor probabilidad corresponde a la especie E_2.

1.26.(a) $0.15^3 = 0.003375$

1.26.(b) $0.15^2 \times 0.85 = 0.019125$

1.26.(c) $3 \times 0.15^2 \times 0.85 = 0.057375$, pues hay 3 maneras de colocar las dos muestras que contienen más del 20 % y la que no, si entre las dos que sí no podemos diferenciar (la que no tiene más del 20 % de magnetita puede ser la primera, o la segunda, o la tercera).

1.27. Aplicando "casos favorables/casos posibles", tenemos que la probabilidad de sacar 1 bola blanca es

$$\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10} = 0.6\,, \quad \text{y la de sacar 2,} \quad \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10} = 0.3$$

pues en el primer caso, para los casos favorables tenemos que de las 2 bolas blancas cogemos 1 y de las 3 negras cogemos 2, mientras que en el segundo, de las 2 bolas blancas, cogemos las 2, y de las 3 bolas negras, cogemos 1. En los dos casos, los casos posibles son las maneras de coger 3 bolas de un total de 5, que son $\binom{5}{3} = 10$.

1.28. Denotaremos por $D_1, \ldots, D_5$ que resulte defectuoso el chip que cogemos en primer lugar,..., quinto lugar, respectivamente, y por $D_1^c, \ldots, D_5^c$ que no lo sea. Calcularemos las probabilidades que nos piden condicionando (siempre el futuro al pasado, no al revés). Así, la probabilidad de que haya que probar sólo dos chips para encontrar los dos defectuosos es

$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_2/D_1)\,P(D_1) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{10} = 0.1\,,$$

ya que $P(D_1) = \frac{2}{5}$ puesto que al coger el primer chip, hay 2 defectuosos de un total de 5, y $P(D_2/D_1) = \frac{1}{4}$, porque si el primero era defectuoso, al coger el segundo queda 1 defectuoso de un total de 4. Análogamente podemos calcular las siguientes probabilidades.

La probabilidad de haber tenido que probar por lo menos 4 es la suma de las probabilidades de haber tenido que probar 4 (exactamente) y de haber tenido que probar 5, que calculamos por separado. La probabilidad de haber tenido que probar 4 (exactamente) es

$$\begin{aligned}
&P(\text{“1 defectuoso entre los 3 primeros”} \cap D_4)\\
&\quad = P(D_4/\text{“1 defectuoso entre los 3 primeros”})\\
&\qquad\qquad\qquad \times\ P(\text{“1 defectuoso entre los 3 primeros”})\\
&\quad = \frac{1}{2}\,P(\text{“1 defectuoso entre los 3 primeros”})
\end{aligned}$$

y ahora hemos de calcular $P(\text{“1 defectuoso entre los 3 primeros”})$, que es

$$\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10} = 0.6\,,$$

que se puede calcular así ya que los “casos posibles” son las maneras de coger los 3 primeros chips de entre los 5, y los “casos favorables” son las maneras de coger 1 de los 2 defectuosos y 2 de los 3 que no lo son. También se puede calcular esta probabilidad condicionando, pero resulta más largo; se haría así:

$$\begin{aligned}
&P(D_1 \cap D_2^c \cap D_3^c) + P(D_1^c \cap D_2 \cap D_3^c) + P(D_1^c \cap D_2^c \cap D_3)\\
&= P(D_3^c/D_1 \cap D_2^c)\,P(D_1 \cap D_2^c) + P(D_3^c/D_1^c \cap D_2)\,P(D_1^c \cap D_2)\\
&+ P(D_3/D_1^c \cap D_2^c)\,P(D_1^c \cap D_2^c)\\
&= \frac{2}{3}\,P(D_2^c/D_1)\,P(D_1) + \frac{2}{3}\,P(D_2/D_1^c)\,P(D_1^c) + \frac{2}{3}\,P(D_2^c/D_1^c)\,P(D_1^c)\\
&= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5}\\
&= 0.2 + 0.2 + 0.2 = 0.6
\end{aligned}$$

Por tanto, la probabilidad de haber tenido que tomar 4 (exactamente) es $\frac{1}{2} \times$

$0.6 = 0.3$. Vamos a calcular la probabilidad de haber tenido que probar 5:

$$\begin{aligned}
&P(\text{“1 defectuoso entre los 4 primeros”} \cap D_5) \\
&\quad = P(D_5/\text{“1 defectuoso entre los 4 primeros”}) \\
&\qquad\qquad\qquad \times P(\text{“1 defectuoso entre los 4 primeros”}) \\
&\quad = \frac{1}{1}\, P(\text{“1 defectuoso entre los 4 primeros”})
\end{aligned}$$

y $P(\text{“1 defectuoso entre los 4 primeros”})$, se puede calcular como

$$\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{3}}{\binom{5}{4}} = \frac{2}{5} = 0.4\,,$$

así que la probabilidad de haber tenido que probar 5 es 0.4. Finalmente, la probabilidad de haber tenido que probar como mínimo 4 es:

$$0.3 + 0.4 = 0.7\,.$$

1.29.(a) Sea R el suceso "hay un intento de robo", $+$ el suceso "la alarma suena" y $-$ el suceso "la alarma no suena". Los datos del problema son:

$$P(R) = 0.1\,, \quad P(+/R) = 0.95\,, \quad P(+/R^c) = 0.03$$

y calculamos la probabilidad que nos piden por Bayes,

$$\begin{aligned}
P(R/+) &= \frac{P(+/R)\,P(R)}{P(+)} = \frac{P(+/R)\,P(R)}{P(+/R)\,P(R) + P(+/R^c)\,P(R^c)} \\
&= \frac{0.95 \times 0.1}{0.95 \times 0.1 + 0.03 \times (1 - 0.1)} = \frac{0.095}{0.122} = 0.7786885246
\end{aligned}$$

1.29.(b) La probabilidad que nos piden es la de una intersección:

$$P(R \cap -) = P(-/R)\,P(R) = (1 - 0.95) \times 0.1 = 0.05 \times 0.1 = 0.005$$

1.29.(c) Aunque se puede utilizar la fórmula de Bayes, en realidad es suficiente con usar las probabilidades calculadas en los apartados anteriores, de esta manera:

$$\begin{aligned}
P(R/-) &= \frac{P(R \cap -)}{P(-)} = \frac{P(R \cap -)}{1 - P(+)} \\
&= \frac{0.005}{1 - 0.122} = \frac{0.005}{0.878} = 0.00569476082
\end{aligned}$$

1.30.(a) Denotamos por D que la unidad sea realmente defectuosa (no-conforme), por ND que no lo sea, por C que sea clasificada como conforme y por NC que sea clasificada como no-conforme. Los datos del problema son:

$$P(D) = 0.1\,, \quad P(NC/D) = 0.95\,, \quad P(NC/ND) = 0.07\,.$$

Hemos de calcular, usando la Fórmula de las Probabilidades Totales,

$$\begin{aligned} P(NC) &= P(NC/D)\,P(D) + P(NC/ND)\,P(ND) \\ &= 0.95 \times 0.1 + 0.07 \times (1 - 0.1) = 0.158 \end{aligned}$$

1.30.(b) $P(C/D) = 1 - P(NC/D) = 1 - 0.95 = 0.05$
1.30.(c) Ahora aplicamos la Fórmula de Bayes, usando en el denominador la probabilidad calculada en el apartado a),

$$P(D/NC) = \frac{P(NC/D)\,P(D)}{P(NC)} = \frac{0.95 \times 0.1}{0.158} = \frac{0.095}{0.158} = 0.6012658228$$

1.31. Usamos la corrección de Chapman de la estimación de Lincoln-Petersen,

$$\hat{N}' = \frac{(n_1 + 1)\,(n_2 + 1)}{m + 1} - 1 = \frac{220 \times 866}{109} - 1 = 1746.889908 \cong 1747$$

que nos da una estimación para el número de ciervos de 1747, teniendo en cuenta que $n_1 = 219$ es el número de marcados en la población, $n_2 = 865$ es el número de los que se extraen en una muestra, y $m = 108$ es el de marcados en la muestra.
1.32.(a) La persistencia regional es 1 menos la probabilidad de que se extingan todas las poblaciones locales, esto es, es $1 - p_e^{12} = 1 - 0.45^{12} = 0.9999310475$, ya que son independientes (probabilidad de la intersección es el producto).
1.32.(b) La persistencia regional de la metapoblación formada por las 3 poblaciones locales es $1 - 0.5 \times 0.45 \times 0.18 = 0.9595$, puesto que son independientes.

Para contestar a la segunda cuestión planteada, hemos de calcular dos persistencias regionales nuevas, P_1, que es la que corresponde a que desaparezcan las dos manchas más pequeñas (las dos poblaciones locales de mayor probabilidad de extinción local) y quede sólo la mancha mayor, y P_2, que es la que corresponde a que desaparezca la mancha mayor (la población local de menor probabilidad de extinción local) y queden las dos manchas menores:

$$P_1 = 1 - 0.18 = 0.82 \quad \text{y} \quad P_2 = 1 - 0.5 \times 0.45 = 1 - 0.225 = 0.775\,.$$

Como es menor P_2, lo más perjudicial sería que desapareciese la mancha mayor (es mejor que desaparezcan las dos más perqueñas, desde el punto de vista de la supervivencia de la metapoblación).